Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. – Für die kurzen Mitteilungen ist ausschließlich der Autor verantwortlich. – Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. – The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

Les chaînes de Darboux et l'équation de Fourier

Dans une récente note[1] M. G. RIBAUD s'est attaché à l'étude de certaines solutions de l'équation classique de FOURIER

(a) $$a\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Il a notamment montré que la solution de CAUCHY

$$\theta = f\left(\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}\right) = f(z)$$

n'est qu'un cas particulier d'une solution plus générale qu'il écrit

(b) $$\theta = t^m f(z)$$

avec une fonction $f(z)$ définie par l'équation du second ordre

(c) $$f'' + 2zf' - 4mf = 0.$$

Nous pensons que la généralisation peut être poussée plus loin et l'égalité (c) de M. G. RIBAUD va nous permettre quelques remarques fort intéressantes.

Le changement de fonction

(d) $$\frac{f'}{f}\left(\frac{u_1'}{u_1} + z\right) - 4\,m = 0$$

permet d'écrire (c) sous la forme

(e) $$\frac{u_1''}{u_1} = z^2 - 1 + 4\,m.$$

Celle-ci nous conduit au théorème de DARBOUX[2] c'est-à-dire à la formation de chaînes d'équations. L'équation (e) étant prise comme premier chaînon, la solution particulière $u_1 = e^{z^2}/2$ obtenue lorsque l'on fait $m = 1/2$, fournit le second chaînon qui s'écrit

(f) $$\frac{u_2''}{u_2} = z^2 - 3 + 4\,m \quad \text{avec} \quad u_2 = u_1' - x\,u_1$$

et ainsi de suite pour tous les autres éléments de la chaîne de DARBOUX, avec pour le n-ième chaînon

(g) $$\frac{u_n''}{u_n} = z^2 - 2\,n + 1 + 4\,m; \quad u_n = u'_{n-1} - x\,u_{n-1}\,.$$

Nous voyons qu'il est remarquable d'avoir pu associer, au problème de la transmission de chaleur dans un mur indéfini homogène un problème d'enchaînement de DARBOUX, tel que toute équation-chaînon est intégrable lorsque les chaînons précédents ont été intégrés.

Signalons également la nature quantique des équations (e), (f),..., (g); en effet, si m varie de façon continue, il n'en est pas de même des polynômes $(4m-1)$, $(4m-3)$ ..., $(4m-2n+1)$ qui ont des «valeurs particulières»: leur donner des valeurs continues seraient introduire de nouvelles équations qui n'auraient pas leur place dans la chaîne de DARBOUX.

[1] G. RIBAUD, C. R. Acad. Sci. Paris *226*, 140 (1948).

[2] G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. 1 et 2, C. R. Acad. Sci. Paris *94*, (1882). – G. VIGUIER, C. R. Acad. Sci. Paris *227*, 504 (1948).

Nous reprenons maintenant l'équation (c) que nous écrivons

(h) $$u' + u^2 + 2z\,u - 4\,m = 0 \quad \text{avec} \quad u = \frac{f'}{f}.$$

C'est là une équation de RICCATI à laquelle nous pouvons associer le problème géométrique des développantes généralisées[1].

Etant donnée une courbe-base (M) et une courbe adjointe (L), sur la tangente en M nous portons la longueur $MN = u(z)$; les courbes (N) ainsi engendrées et admettant pour tangente NL sont dites «développantes généralisées de la courbe-base (M)»: elles sont déterminées par une équation de RICCATI en $u(z)$.

L'équation (h), associée à un tel problème, nous donne une famille de courbes-base à paramétrisation isométrique dont l'élément d'arc a la valeur $\sigma' = -4m$.

Si nous prenons pour (M) le cercle $\xi = 4\,m\,\cos z$, $\eta = 4\,m\,\sin z$, la courbe adjointe (L) est déterminée par la relation

$$\overline{ML}^2 = 1 + 4z^2$$

qui ne dépend pas du paramètre m.

Ainsi, nous avons pu associer à l'équation de FOURIER un problème d'enchaînement de DARBOUX et des notions métriques classiques liées à l'équation de RICCATI, ce qui, en fait, confirme l'extrême richesse de cette équation du second ordre (a).

G. VIGUIER

Paris, Institut Henri Poincaré, le 20 juin, 1949.

Zusammenfassung

Indem man eine von G. RIBAUD angegebene Lösung der FOURIERschen Gleichung verallgemeinert, gelangt man zum DARBOUXschen Theorem. Dieses führt zur Bildung von Gleichungsketten. Ebenso erkennt man die Möglichkeit, das geometrische Problem der verallgemeinerten Erzeugenden damit in Verbindung zu bringen.

[1] G. VIGUIER, Ann. Fac. Sci. Toulouse *59*, L. IX (1945).

Beitrag zum Zinsfußproblem der Prämie

Das von A. J. LOTKA[1] entwickelte Verfahren zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung kann verallgemeinert und dann zur Lösung des Zinsfußproblems der Prämie verwendet werden.

Wenn für die Zinsintensität δ_0 bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= e^{-\delta_0 t}\, l_{x+t}\, \mu_{x+t}\,, \\ F_n &= e^{-\delta_0 n}\, l_{x+n}\,, \\ \Phi(t) &= e^{-\delta_0 t}\, l_{x+t}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1] Vgl. darüber z. B. A. LINDER, *Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung* (Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung *4*, 136 [1938], und A. H. POLLARD, J. Institute of Actuaries *74*, 288 (1948).

so gilt für die Prämie der gemischten Versicherung auf die Dauer von n Jahren,

$$P(\delta_0) = \frac{\int\limits_0^n F(t)\,dt + F_n}{\int\limits_0^n \Phi(t)\,dt}. \qquad (2)$$

Wird die Zinsintensität variiert in $\delta = \delta_0 + (\delta - \delta_0) = \delta_0 + r$, so folgt

$$P(\delta) = \frac{\int\limits_0^n e^{-rt} F(t)\,dt + e^{-rn} F_n}{\int\limits_0^n e^{-rt} \Phi(t)\,dt}. \qquad (3)$$

Für den Augenblick sehen wir $P(\delta_0)$ und $P(\delta)$ als gegeben an und suchen r zu bestimmen. Dazu differenzieren wir (3) nach r und führen zwei noch unbestimmte Größen A_r und B_r ein, derart daß

$$\frac{dP(\delta)}{dr} = (A_r - B_r)\, P(\delta), \qquad (4)$$

woraus

$$P(\delta) = P(\delta_0) \exp\left(\int (A_r - B_r)\, dr\right). \qquad (5)$$

Sodann entwickeln wir im Zähler und im Nenner von

$$A_r - B_r = \frac{\frac{dP(\delta)}{dr}}{P(\delta)} = \frac{\text{Ableitung von (3) nach } r}{(3)}$$

die Größe e^{-rt} in die Reihe. Wir kürzen die Momente ab mit

$$U_k = \int\limits_0^n t^k\, \Phi(t)\, dt \qquad (6)$$

und

$$V_k = \int\limits_0^n t^k\, F(t)\, dt + n^k F_n, \qquad (7)$$

und erhalten, wenn keine höhern Potenzen als r berücksichtigt werden,

$$A_r - B_r = \frac{U_1 - r\,U_2}{U_0 - r\,U_1} - \frac{V_1 - r\,V_2}{V_0 - r\,V_1} = \alpha + \beta r. \qquad (8)$$

Für α und β finden wir

$$\alpha = \frac{U_1}{U_0} - \frac{V_1}{V_0} \qquad (9)$$

und

$$\beta = \left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2 - \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2 - \frac{U_2}{U_0} + \frac{V_2}{V_0}. \qquad (10)$$

Gleichung (8) in (5) eingeführt ergibt schließlich

$$P(\delta) = P(\delta_0) \exp\left(\alpha r + \frac{\beta r^2}{2}\right). \qquad (11)$$

Sind die Werte $F(t)$, F_n und $\Phi(t)$ gegeben, so lassen sich aus (6) und (7) die Momente U_k und V_k ermitteln und aus ihnen nach (9) und (10) die Koeffizienten α und β. Wird nunmehr in Umkehrung der ursprünglichen Annahme $r = \delta - \delta_0$ (Zinsfußvariation) als bekannt vorausgesetzt, so ist aus (11) die Prämie $P(\delta)$ berechenbar; damit ist die gestellte Aufgabe als gelöst anzusehen.

Die Güte der Näherung ist für eine Zinsfußvariation bis zu $+1\%$ absolut (ausgehend von $3{,}5\%$) für Versicherungsdauern bis zu 40 Jahren und für eine Variation bis zu -1% absolut für Versicherungsdauern bis zu 30 Jahren sehr gut. Die Abweichungen fallen größer aus, ohne daß die Formel aber praktisch unbrauchbar würde, sofern bei einer Versicherungsdauer von mehr als 30 Jahren die Zinsfußvariation $-0{,}5\%$ absolut überschreitet.

Das Verfahren ist mit einer unbedeutenden Modifikation auch gültig, wenn vom diskontinuierlichen Ansatz statt vom kontinuierlichen auszugehen ist. Es empfiehlt sich dann aber, die Momente durch die üblichen Summen der diskontierten Zahlen auszudrücken, um sich so vom Beginnalter x unabhängig zu machen.

Schließlich ist das Vorgehen nicht auf die Prämie der gemischten Versicherung beschränkt, sondern auch auf die Prämie der Invalidenversicherung, der Witwenversicherung u. a. anwendbar.

Sind $P(\delta)$ und $P(\delta_0)$ gegeben und für $P(\delta_0)$ auch die Werte $F(t)$, F_n und $\Phi(t)$ bekannt, so läßt sich (11) brauchen, um den $P(\delta)$ zugrunde liegenden Zinssatz δ zu ermitteln.

E. ZWINGGI

Versicherungstechnische Abteilung des Mathematischen Seminars der Universität Basel, den 21. September 1949.

Summary

A method of approximation is given to the value of the premium for an endowment assurance at rates of interest differing from those tabulated.

Ein Beitrag zum Problem der Struktur des Atomkerns: der N_8P_4-Körper[1]

Wie seit langem bekannt ist, sind in der Isotopentafel deutlich Kernreihen mit $N-Z$ = const wahrzunehmen, eine Erscheinung, die u.a. durch die Relation von DICKSON und KONOPINSKI[2] bestätigt wurde. 1934 zeigte BARTLETT[3], daß neben diesen Kernreihen auch solche mit $2Z-N$ = const existieren, so daß man in der Isotopentafel *zwei Entwicklungsrichtungen* beobachten kann. Kürzlich formulierten ST. MEYER und A. KOSS-ROSENQVIST[4], daß es sich dabei um *zweierlei Aufbauschritte* handelt, d. h. die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Reihengliedern beträgt entweder N_2P_2 (Richtung $N-Z$ = const) oder N_4P_2 (Richtung $2Z-N$ = const). Andere Entwicklungsschritte existieren *nicht* (l.c.).

Mit ausgezeichneter Deutlichkeit werden diese Aufbauprinzipien und darüber hinaus neue Gesetzmäßigkeiten sichtbar, wenn man im Diagramm $(N-Z)$ gegen $(2Z-N)$ die drei Kerngruppen *mu–zu*, *mu–zg* und *mg–zg*[5] getrennt darstellt. Die Abbildung zeigt das *mu–zu*-System. Die hier aufzuzeigende Gesetzmäßigkeit findet sich in den beiden übrigen Gruppen sehr

[1] Vorläufige Mitteilung. Abkürzungen im Text und Abbildung: m = Massenzahl; Z = Ladungszahl; P = Symbol für Proton; N = Symbol für Neutron; g = gerade; u = ungerade. Die Formeln der subnuklearen Einheiten werden nach Art der chemischen Formeln geschrieben, d.h. die Indices geben die Zahl der zu einer Einheit verbundenen Neutronen und Protonen an.

[2] G. R. DICKSON und E. J. KONOPINSKI, Phys. Rev. *58*, 949 (1940).

[3] J. H. BARTLETT, Jr., Phys. Rev. *45*, 847 (1934).

[4] ST. MEYER und A. KOSS-ROSENQVIST, Acta phys. Austr. *2*, 109, 124 (1948). – ST. MEYER, Z. Naturforschg. *4a*, 84 (1949).

[5] Von dieser Gruppe werden sinngemäß jeweils nur die beiden häufigsten Isotope je Plejade in das Diagramm aufgenommen.